**Министерство образования и науки Российской Федерации**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

**Ульяновский Государственный Технический Университет**

**РЕФЕРАТ  
по дисциплине**

**«Теория информационных процессов и систем»**

**на тему:**

**«Система массового обслуживания»**

Выполнили:

студенты гр. ИСТбд-31

Прохоров Е.Э.,

Голобокова А.В.

Содержание

Введение............................................................................................................................ 3

1 Основные понятия и классификация систем массового обслуживания................... 5

2 Марковские цепи с конечным числом состояний и дискретным временем……… 8

3 Марковские цепи с конечным числом состояний и непрерывным временем…     10

4 Процессы рождения и гибели...................................................................................... 11

5 Уравнения Колмогорова……………………………………………………………. 14

6 Основные типы открытых систем массового обслуживания................................... 15

6.1 Одноканальная система массового обслуживания с отказами............................. 15

6.2 Многоканальная система массового обслуживания с отказами........................... 16

6.3 Одноканальная система массового обслуживания с ограниченной длиной очереди....................................................................................................................................... 17

6.4 Одноканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью 18

6.5 Многоканальная система массового обслуживания с ограниченной очередью.. 19

6.6 Многоканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью………………………………………………………………………………………. 21

6.7 Многоканальная система массового обслуживания с ограниченной очередью и ограниченным временем ожидания в очереди........................................................................ 22

Заключение……………………………………………………………………………… 24

# Введение

Большой класс систем, которые сложно изучить аналитическими способами, но которые хорошо изучаются методами статистического моделирования, сводится к системам массового обслуживания (СМО).

СМО представляет собой математическую схему, предназначенную для формального описания объектов, которые характеризуются наличием обслуживающих приборов (обслуживающих каналов), наличием входного потока заявок на обслуживание, возможно очереди из этих заявок, ожидающих начала обслуживания и выходного потока обслуженных заявок или заявок, получивших отказ. С такими системами можно столкнуться в совершенно различных сферах человеческой деятельности. Примерами СМО могут служить: автобусный маршрут и перевозка пассажиров; телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, стоянки такси, обслуживающие клиентов; и т.д.

Всякая СМО предназначена для обслуживания какого-то потока заявок (или "требований"), поступающих в какие-то случайные моменты времени. Обслуживание заявки продолжается какое-то, вообще говоря, случайное время, после чего канал освобождается и готов к приему следующей заявки. Случайный характер потока заявок и времен обслуживания приводит к тому, что в какие-то периоды времени на входе СМО скапливается излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными); в другие же периоды СМО будет работать с недогрузкой или вообще простаивать.

Заявки могут приходить неравномерно, каналы могут обслуживать разные заявки за разное время и так далее, количество заявок всегда весьма велико. Все это делает такие системы сложными для изучения и управления, и проследить все причинно-следственные связи в них не представляется возможным. Поэтому принято представление о том, что обслуживание в сложных системах носит случайный характер.

Подход к их изучению СМО един. Он состоит в том, что, во-первых, с помощью генератора случайных чисел разыгрываются случайные числа, которые имитируют случайные моменты появления заявок и время их обслуживания в каналах. Но в совокупности эти случайные числа, подчинены статистическим закономерностям.

Таким образом, систему испытывают случайными входными сигналами, подчиненными заданному статистическому закону, а в качестве результата принимают статистические показатели, усредненные по времени рассмотрения или по количеству опытов.

Во-вторых, все модели СМО собираются типовым образом из небольшого набора элементов (канал, источник заявок, очередь, заявка, дисциплина обслуживания, стек и так далее), что позволяет имитировать эти задачи типовым образом. Для этого модель системы собирают из конструктора таких элементов.

**1.Основные понятия и классификация систем массового обслуживания**

Заявкой (или требованием) называется спрос на удовлетворение какой-либо потребности (далее потребности предполагаются однотипными). Выполнение заявки называется обслуживанием заявки.

Системой массового обслуживания (СМО) называется любая система для выполнения заявок, поступающих в неё в случайные моменты времени.

Поступление заявки в СМО называется событием. Последовательность событий, заключающихся в поступлении заявок в СМО, называется входящим потоком заявок. Последовательность событий, заключающихся в выполнении заявок в СМО, называется выходящим потоком заявок.

Поток заявок называется простейшим, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) отсутствие последействия, т.е. заявки поступают независимо друг от друга;

2) стационарность, т.е. вероятность поступления данного числа заявок на любом временном отрезке [t1; t2] зависит лишь от величины этого отрезка и не зависит от значения t1, что позволяет говорить о среднем числе заявок за единицу времени, λ, называемом интенсивностью потока заявок;

3) ординарность, т.е. в любой момент времени в СМО поступает лишь одна заявка, а поступление одновременно двух и более заявок пренебрежимо мало.

Для простейшего потока вероятность pi(t) поступления в СМО ровно i заявок за время t вычисляется по формуле:

http://xreferat.ru/image/114/1307193556_51.png                                                                            (6)

т.е. вероятности распределены по закону Пуассона с параметром λt. По этой причине простейший поток называется также пуассоновским потоком.

Функция распределения F(t) случайного интервала времени T между двумя последовательными заявками по определению равна http://xreferat.ru/image/114/1307193556_52.png. Но http://xreferat.ru/image/114/1307193557_53.png, где http://xreferat.ru/image/114/1307193557_54.png – вероятность того, что следующая после последней заявки поступит в СМО по истечении времени t, т.е. за время t в СМО не поступит ни одна заявка. Но вероятность этого события находится из (6) при i = 0. Таким образом: http://xreferat.ru/image/114/1307193557_55.png

http://xreferat.ru/image/114/1307193557_56.png                                                                                      (7)

Плотность вероятности f(t) случайной величины T определяется формулой:

http://xreferat.ru/image/114/1307193558_57.png         , http://xreferat.ru/image/114/1307193558_58.png

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины T равны соответственно:

http://xreferat.ru/image/114/1307193558_59.png

Каналом обслуживания называется устройство в СМО, обслуживающее заявку. СМО, содержащее один канал обслуживания, называется одноканальной, а содержащее более одного канала обслуживания – многоканальной.

Если заявка, поступающая в СМО, может получить отказ в обслуживании (в силу занятости всех каналов обслуживания) и в случае отказа вынуждена покинуть СМО, то такая СМО называется СМО с отказами.

Если в случае отказа в обслуживании заявки могут вставать в очередь, то такие СМО называются СМО с очередью (или с ожиданием). При этом различают СМО с ограниченной и неограниченной очередью. Очередь может быть ограничена как по количеству мест, так и по времени ожидания. Различают СМО открытого и замкнутого типа. В СМО открытого типа поток заявок не зависит от СМО. В СМО замкнутого типа обслуживается ограниченный круг клиентов, а число заявок может существенно зависеть от состояния СМО (например, бригада слесарей – наладчиков, обслуживающих станки на заводе).

СМО могут также различаться по дисциплине обслуживания.

Если в СМО нет приоритета, то заявки отбираются из очереди в канал по различным правилам.

- Первым пришел – первым обслужен (FCFS – First Came – First Served)

- Последним пришел – первым обслужен (LCFS – Last Came – First Served)

- Первоочередное обслуживание требований с кратчайшей длительностью обслуживания (SPT/SJE)

- Первоочередное обслуживание требований с кратчайшей длительностью дообслуживания (SRPT)

- Первоочередное обслуживание требований с кратчайшей средней длительностью обслуживания (SEPT)

- Первоочередное обслуживание требований с кратчайшей средней длительностью дообслуживания (SERPT)

Приоритеты бывают двух типов – абсолютный и относительный.

Если требование в процессе обслуживания может быть удалено из канала и возвращено в очередь (либо вовсе покидает СМО) при поступлении требования с более высоким приоритетом, то система работает с абсолютным приоритетом. Если обслуживание любого требования, находящегося в канале не может быть прервано, то СМО работает с относительным приоритетом. Существуют также приоритеты, осуществляемые с помощью конкретного правила или набора правил. Примером может служить приоритет, изменяющийся с течением времени.

СМО описываются некоторыми параметрами, которые характеризуют эффективность работы системы.

http://xreferat.ru/image/114/1307193558_60.png – число каналов в СМО;

http://xreferat.ru/image/114/1307193558_61.png – интенсивность поступления в СМО заявок;

http://xreferat.ru/image/114/1307193559_62.png – интенсивность обслуживания заявок;

http://xreferat.ru/image/114/1307193559_63.png – коэффициент загрузки СМО;

http://xreferat.ru/image/114/1307193559_64.png – число мест в очереди;

http://xreferat.ru/image/114/1307193559_65.png – вероятность отказа в обслуживании поступившей в СМО заявки;

http://xreferat.ru/image/114/1307193559_66.png – вероятность обслуживания поступившей в СМО заявки (относительная пропускная способность СМО);

При этом:

http://xreferat.ru/image/114/1307193560_67.png                                                                             (8)

А – среднее число заявок, обслуживаемых в СМО в единицу времени (абсолютная пропускная способность СМО)

http://xreferat.ru/image/114/1307193560_68.png                                                                                           (9)

http://xreferat.ru/image/114/1307193560_69.png – среднее число заявок, находящихся в СМО

http://xreferat.ru/image/114/1307193560_70.png – среднее число каналов в СМО, занятых обслуживанием заявок. В тоже время это http://xreferat.ru/image/114/1307193561_71.png – среднее число заявок, обслуживаемых в СМО за единицу времени. Величина http://xreferat.ru/image/114/1307193560_70.png определяется как математическое ожидание случайного числа занятых обслуживанием n каналов.

http://xreferat.ru/image/114/1307193561_72.png,                                                           (10)

где http://xreferat.ru/image/114/1307193561_73.png – вероятность нахождения системы в Sk состоянии.

http://xreferat.ru/image/114/1307193561_74.png – коэффициент занятости каналов

http://xreferat.ru/image/114/1307193561_75.png – среднее время ожидания заявки в очереди

http://xreferat.ru/image/114/1307193562_76.png – интенсивность ухода заявок из очереди

http://xreferat.ru/image/114/1307193562_77.png – среднее число заявок в очереди. Определяется как математическое ожидание случайной величины m – числа заявок, состоящих в очереди

http://xreferat.ru/image/114/1307193562_78.png                                                                        (11)

Здесь http://xreferat.ru/image/114/1307193562_79.png – вероятность нахождения в очереди i заявок;

http://xreferat.ru/image/114/1307193562_80.png – среднее время пребывания заявки с СМО

http://xreferat.ru/image/114/1307193563_81.png – среднее время пребывания заявки в очереди

Для открытых СМО справедливы соотношения:

http://xreferat.ru/image/114/1307193563_82.png                                                                            (12)

http://xreferat.ru/image/114/1307193563_83.png                                                                                            (13)

Эти соотношения называются формулами Литтла и применяются только для стационарных потоков заявок и обслуживания.

Рассмотрим некоторые конкретные типы СМО. При этом будет предполагаться, что плотность распределения промежутка времени между двумя последовательными событиями в СМО имеет показательное распределение (7), а все потоки являются простейшими.

**2. Марковские цепи с конечным числом состояний и дискретным временем**

Пусть некоторая система S может находиться в одном из состояний конечного (или счетного) множества возможных состояний S1, S2,…, Sn, а переход из одного состояния в другое возможен только в определенные дискретные моменты времени t1, t2, t3, называемые шагами.

Если система переходит из одного состояния в другое случайно, то говорят, что имеет место случайный процесс с дискретным временем.

Случайный процесс называется марковским, если вероятность перехода из любого состояния Si в любое состояние Sj не зависит от того, как и когда система S попала в состояние Si (т.е. в системе S отсутствует последствие). В таком случае говорят, что функционирование системы S описывается дискретной цепью Маркова.

Переходы системы S в различные состояния удобно изображать с помощью графа состояний (рис. 1).

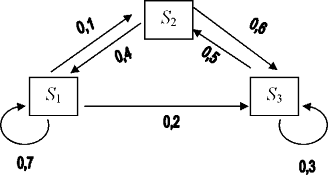
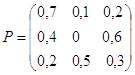


Рисунок 1 – Пример размеченного графа состояний

Вершины графа S1, S2, S3 обозначают возможные состояния системы. Стрелка, направленная из вершины Si в вершину Sj обозначает переход http://xreferat.ru/image/114/1307193546_2.png; число, стоящее рядом со стрелкой, обозначает величину вероятности этого перехода. Стрелка, замыкающаяся на i-той вершине графа, обозначает, что система остается в состоянии Si с вероятностью, стоящей у стрелки.

Графу системы, содержащему n вершин, можно поставить в соответствие матрицу NxN, элементами которой являются вероятности переходов pij между вершинами графа. Например, граф на рис. 1 описывается матрицей P:



называемой матрицей вероятностей переходов. Элементы матрицы pij удовлетворяют условиям:

http://xreferat.ru/image/114/1307193546_4.png                                                                                          (1)

http://xreferat.ru/image/114/1307193547_5.png                                                                                                     (2)

Элементы матрицы pij – дают вероятности переходов в системе за один шаг. Переход

Si – Sj за два шага можно рассматривать как происходящий на первом шаге из Si в некоторое промежуточное состояние Sk и на втором шаге из Sk в Si. Таким образом, для элементов матрицы вероятностей переходов из Si в Sj за два шага получим:

http://xreferat.ru/image/114/1307193547_6.png

В общем случае перехода http://xreferat.ru/image/114/1307193546_2.png за m шагов для элементов http://xreferat.ru/image/114/1307193547_7.png матрицы вероятностей переходов справедлива формула:

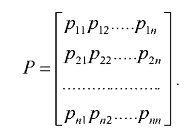
http://xreferat.ru/image/114/1307193547_8.png                                                        (3)

Получим два эквивалентных выражения для http://xreferat.ru/image/114/1307193547_7.png:

http://xreferat.ru/image/114/1307193547_9.png

http://xreferat.ru/image/114/1307193548_10.png

Пусть система S описывается матрицей вероятностей переходов Р:



Если обозначить через Р(m) матрицу, элементами которой являются рi вероятности переходов из Si в Sj за m шагов, то справедлива формула

http://xreferat.ru/image/114/1307193548_12.png,

где матрица Рm получается умножением матрицы P саму на себя m раз.

Исходное состояние системы характеризуется вектором состояния системы Q(qi) (называемым также стохастическим вектором).

http://xreferat.ru/image/114/1307193548_13.png

где qj - вероятность того, что исходным состоянием системы является Sj состояние. Аналогично (1) и (2) справедливы соотношения

http://xreferat.ru/image/114/1307193549_14.png     http://xreferat.ru/image/114/1307193549_15.png

Обозначим через

http://xreferat.ru/image/114/1307193549_16.png

вектор состояния системы после m шагов, где qj – вероятность того, что после m шагов система находится в Si состоянии. Тогда справедлива формула

http://xreferat.ru/image/114/1307193549_17.png

Если вероятности переходов Pij остаются постоянными, то такие марковские цепи называются стационарными. В противном случае марковская цепь называется нестационарной.

**3. Марковские цепи с конечным числом состояний и непрерывным временем**

Если система S может переходить в другое состояние случайным образом в произвольный момент времени, то говорят о случайном процессе с непрерывным временем. В отсутствии последействия такой процесс называется непрерывной марковской цепью. При этом вероятности переходов http://xreferat.ru/image/114/1307193546_2.png для любых i и j в любой момент времени равны нулю (в силу непрерывности времени). По этой причине вместо вероятности перехода http://xreferat.ru/image/114/1307193549_18.png вводится величина http://xreferat.ru/image/114/1307193550_19.png- плотность вероятности перехода из состояния http://xreferat.ru/image/114/1307193550_20.png в состояние http://xreferat.ru/image/114/1307193550_21.png, определяемая как предел:

http://xreferat.ru/image/114/1307193550_22.png http://xreferat.ru/image/114/1307193550_23.png

Если величины http://xreferat.ru/image/114/1307193551_24.png не зависят от t, то марковский процесс называется однородным. Если за время http://xreferat.ru/image/114/1307193551_25.png система может изменить свое состояние не более чем один раз, то говорят, что случайный процесс является ординарным. Величину http://xreferat.ru/image/114/1307193551_24.png называют интенсивностью перехода системы из Si в Sj. На графе состояний системы численные значения http://xreferat.ru/image/114/1307193551_24.png ставят рядом со стрелками, показывающими переходы в вершины графа.

Зная интенсивности переходов можно найти величины p1(t), p2(t),…, pn(t) – вероятности нахождения системы S в состояниях S1, S2,…, Sn соответственно. При этом выполняется условие:

http://xreferat.ru/image/114/1307193551_26.png

Распределение вероятностей состояний системы, которое можно характеризовать вектором http://xreferat.ru/image/114/1307193551_27.png, называется стационарным, если оно не зависит от времени, т.е. все компоненты вектора http://xreferat.ru/image/114/1307193551_28.png являются константами.

Состояния Si и Sj называются сообщающимися, если возможны переходы http://xreferat.ru/image/114/1307193552_29.png.

Состояние Si называется существенным, если всякое Sj, достижимое из Si, является сообщающимся с Si. Состояние Si называется несущественным, если оно не является существенным.

Если существуют предельные вероятности состояний системы:

http://xreferat.ru/image/114/1307193552_30.png,

не зависящие от начального состояния системы, то говорят, что при http://xreferat.ru/image/114/1307193552_31.png в системе устанавливается стационарный режим.

Система, в которой существуют предельные (финальные) вероятности состояний системы, называется эргодической, а протекающий в ней случайный процесс эргодическим.

Теорема 1. Если Si – несущественное состояние, то http://xreferat.ru/image/114/1307193552_32.png т.е. при http://xreferat.ru/image/114/1307193552_31.png система выходит из любого несущественного состояния.

Теорема 2. Чтобы система с конечным числом состояний имела единственное предельное распределение вероятностей состояний, необходимо и достаточно, чтобы все ее существенные состояния сообщались между собой.

Если случайный процесс, происходящий в системе с дискретными состояниями является непрерывной марковской цепью, то для вероятностей p1(t), р2(t),…, pn(t) можно составить систему линейных дифференциальных уравнений, называемых уравнениями Колмогорова. При составлении уравнений удобно пользоваться графом состояний системы. В левой части каждого из них стоит производная вероятности какого-то (j-го) состояния. В правой части – сумма произведений вероятностей всех состояний, из которых возможен переход в данное состояние, на интенсивности соответствующих потоков, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного (j-го) состояния, умноженная на вероятность данного (j-го) состояния.

**4. Уравнения Колмогорова**

Рассмотрим математическое описание марковского случайного процесса с дискретными состояниями системы So, Sl, S2(см. рис. 6.2.1) и непрерывным временем. Полагаем, что все переходы системы массового обслуживания из состояния Si в состояние Sj происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями λij, а обратный переход под воздействием другого потока λij,. Введем обозначение pi как вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии Si. Для любого момента времени t справедливо записать нормировочное условие—сумма вероятностей всех состояний равна 1:

2

Σpi(t)=p0(t)+ p1(t)+ p2(t)=1

i=0

Проведем анализ системы в момент времени t, задав малое приращение времени Δt, и найдем вероятность р1 (t+ Δt) того, что система в момент времени (t+ Δt) будет находиться в состоянии S1 которое достигается разными вариантами:

а) система в момент t с вероятностью p1(t) находилась в состоянии S1 и за малое приращение времени Δt так и не перешла в другое соседнее состояние — ни в S0, ни b S2. Вывести систему из состояния S1 можно суммарным простейшим потоком c интенсивностью (λ10 +λ12), поскольку суперпозиция простейших потоков также является простейшим потоком. На этом основании вероятность выхода из состояния S1 за малый промежуток времени Δ t приближенно равна (λ10 +λ12)\* Δ t. Тогда вероятность невыхода из этого состояния равна [1 -(λ10 +λ12)\* Δ t].B соответствии с этим вероятность того, что система останется в состоянии Si на основании теоремы умножения вероятностей, равна:

p1(t) [1 -(λ10 +λ12)\* Δ t];

б)система находилась в соседнем состоянии So и за малое время Δ t перешла в состояние So Переход системы происходит под воздействием потока λ01 с вероятностью, приближенно равной λ01Δ t

Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S1, в этом варианте равна po(t) λ 01 Δ t;

в) система находилась в состоянии S2 и за время Δ t перешла в состояние S1 под воздействием потока интенсивностью λ 21 с вероятностью, приближенно равной λ21Δ t. Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S1, равна p2(t) λ21Δ t.

Применяя теорему сложения вероятностей для этих вариантов, получим выражение:

p2(t+Δt)= p1(t) [1 -(λ10 +λ12)\* Δ t]+ po(t) λ 01 Δ t+ p2(t) λ21Δ t ,

которое можно записать иначе:

p2(t+Δt)- p1(t)/ Δ t= po(t) λ 01+ p2(t) λ21- p1(t) (λ10 +λ12) .

Переходя к пределу при Δt -> 0, приближенные равенства перейдут в точные, и тогда получим производную первого порядка

dp2/dt= p0 λ 01 +p2 λ21 -p1 (λ10 +λ12) ,

что является дифференциальным уравнением.

Проводя рассуждения аналогичным образом для всех других состояний системы, получим систему дифференциальных уравнений, которые называются уравнениями А.Н. Колмогорова:

dp0 /dt= p1 λ 10 ,

dp1 /dt= p0 λ 01 +p2 λ21 -p1 (λ10 +λ12) ,

dp2 /dt= p1 λ 12 +p2 λ21 .

Для составления уравнений Колмогорова существуют общие правила.

Уравнения Колмогорова позволяют вычислить все вероятности состояний СМО Si в функции времени pi(t). В теории случайных процессов показано, что если число состояний системы конечно, а из каждого из них можно перейти в любое другое состояние, то существуют предельные (финальные) вероятности состояний, которые показывают на среднюю относительную величину времени пребывания системы, в этом состоянии. Если предельная вероятность состояния S0 – равна p0 = 0,2, то, следовательно, в среднем 20% времени, или 1/5 рабочего времени, система находится в состоянии So. Например, при отсутствии заявок на обслуживание к = 0, р0 = 0,2,; следовательно, в среднем 2 ч в день система находится в состоянии So и простаивает, если продолжительность рабочего дня составляет 10 ч.

Поскольку предельные вероятности системы постоянны, то заменив в уравнениях Колмогорова соответствующие производные нулевыми значениями, получим систему линейных алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим СМО. Такую систему уравнений составляют по размеченному графу состояний СМО по следующим правилам: слева от знака равенства в уравнении стоит предельная вероятность рi рассматриваемого состояния Si умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, выводящих (выходящие стрелки) изданного состояния Si систему, а справа от знака равенства — сумма произведений интенсивности всех потоков, входящих (входящие стрелки) в состояние Si систему, на вероятность тех состояний, из которых эти потоки исходят. Для решения подобной системы необходимо добавить еще одно уравнение, определяющее нормировочное условие, поскольку сумма вероятностей всех состояний СМО равна 1:

n

Σpi(t)=1

i=1

Например, для СМО, имеющей размеченный граф из трех состояний So, S1, S2 рис. 6.2.1, система уравнений Колмогорова, составленная на основе изложенного правила, имеет следующий вид:

Для состояния So→ p0 λ 01 = p1 λ 10

Для состояния S1→ p1 (λ10 +λ12) = p0 λ 01 +p2 λ21

Для состояния S2→ p2 λ21 = p1 λ 12

p0 +p1 +p2 =1

dp 4(t)/dt= λ34 p3(t) - λ43 p4(t) ,

p1(t)+ p2(t)+ p3(t)+ p4(t)=1 .

К этим уравнениям надо добавить еще начальные условия. Например, если при t = 0 система S находится в состоянии S1, то начальные условия можно записать так:

p1(0)=1, p2(0)= p3(0)= p4(0)=0 .

Переходы между состояниями СМО происходит под воздействием поступления заявок и их обслуживания. Вероятность перехода в случае, если поток событий простейший, определяется вероятностью появления события в течение времени Δ t, т.е. величиной элемента вероятности перехода λij Δ t, где λij — интенсивность потока событий, переводящих систему из состояния i в состояние i (по соответствующей стрелке на графе состояний).

Если все потоки событий, переводящие систему из одного состояния в другое, простейшие, то процесс, протекающий в системе, будет марковским случайным процессом, т.е. процессом без последствия. В этом случае поведение системы достаточно просто, определяется, если известны интенсивность всех этих простейших потоков событий. Например, если в системе протекает марковский случайный процесс с непрерывным временем, то, записав систему уравнений Колмогорова для вероятностей состояний и проинтегрировав эту систему при заданных начальных условиях, получим все вероятности состояний как функции времени:

pi(t), p2(t),…., pn(t) .

Во многих случаях на практике оказывается, что вероятности состояний как функции времени ведут себя таким образом, что существует

lim pi(t) = pi (i=1,2,…,n) ; t→∞

независимо от вида начальных условий. В этом случае говорят, что существуют предельные вероятности состояний системы при t->∞ и в системе устанавливается некоторый предельный стационарный режим. При этом система случайным образом меняет свои, состояния, но каждое из этих состояний осуществляется с некоторой постоянной вероятностью, определяемой средним временем пребывания системы в каждом из состояний.

Вычислить предельные вероятности состояния рi можно, если в системе положить все производные равными 0, поскольку в уравнениях Колмогорова при t-> ∞ зависимость от времени пропадает. Тогда система дифференциальных уравнений превращается в систему Обычных линейных алгебраических уравнений, которая совместно с нормировочным условием позволяет вычислить все предельные вероятности состояний.

**5. Процессы рождения и гибели**

Так называется широкий класс случайных процессов, происходящих в системе, размеченный граф состояний которой изображен на рис. 3.

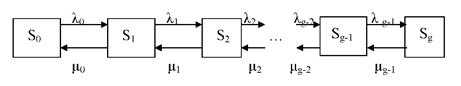


Рисунок 2 – Граф состояний для процессов гибели и размножения

Здесь величины http://xreferat.ru/image/114/1307193553_34.png, http://xreferat.ru/image/114/1307193553_35.png,…, http://xreferat.ru/image/114/1307193553_36.png – интенсивности переходов системы из состояния в состояние слева направо, можно интерпретировать как интенсивности рождения (возникновения заявок) в системе. Аналогично, величины http://xreferat.ru/image/114/1307193553_37.png,http://xreferat.ru/image/114/1307193554_38.png,…,http://xreferat.ru/image/114/1307193554_39.png – интенсивности переходов системы из состояния в состояние справа налево, можно интерпретировать как интенсивности гибели (выполнения заявок) в системе.

Поскольку все состояния являются сообщающимися и существенными, существует (в силу теоремы 2) предельное (финальное) распределение вероятностей состояний. Получим формулы для финальных вероятностей состояний системы.

В стационарных условиях для каждого состояния поток, входящий в данное состояние должен равняться потоку, исходящему из данного состояния. Таким образом, имеем:

Для состояния S0:

http://xreferat.ru/image/114/1307193554_40.png

Следовательно:

http://xreferat.ru/image/114/1307193554_41.png

Для состояния S1:

http://xreferat.ru/image/114/1307193554_42.png

Следовательно:

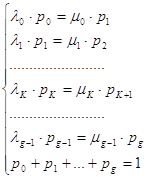
http://xreferat.ru/image/114/1307193555_43.png

С учетом того, что http://xreferat.ru/image/114/1307193554_41.png:

http://xreferat.ru/image/114/1307193555_44.png

http://xreferat.ru/image/114/1307193555_45.png

Аналогично получаем уравнения для остальных состояний системы. В результате получим систему уравнений:



Решение этой системы будет иметь вид:

http://xreferat.ru/image/114/1307193555_47.png                                               (4)

http://xreferat.ru/image/114/1307193556_48.png, http://xreferat.ru/image/114/1307193556_49.png,…, http://xreferat.ru/image/114/1307193556_50.png                                         (5)

**6. Основные типы открытых систем массового обслуживания**

**6.1 Одноканальная система массового обслуживания с отказами**

Размеченный граф состояний одноканальной СМО представлен на рисунке 3.

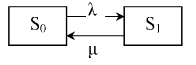
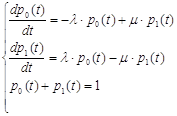


Рисунок 3 – Граф состояний одноканальной СМО

Здесь http://xreferat.ru/image/114/1307193558_61.png и http://xreferat.ru/image/114/1307193559_62.png – интенсивность потока заявок и выполнения заявок соответственно. Состояние системы So обозначает, что канал свободен, а S1 – что канал занят обслуживанием заявки.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова для такой СМО имеет вид:



где po(t) и p1(t) – вероятности нахождения СМО в состояниях So и S1 соответственно. Уравнения для финальных вероятностей po и p1 получим, приравнивая нулю производные в первых двух уравнениях системы. В результате получим:

http://xreferat.ru/image/114/1307193564_86.png                                                                               (14)

http://xreferat.ru/image/114/1307193564_87.png                                                                               (15)

Вероятность p0 по своему смыслу есть вероятность обслуживания заявки pобс, т. к. канал является свободным, а вероятность р1 по своему смыслу является вероятностью отказа в обслуживании поступающей в СМО заявки ротк, т. к. канал занят обслуживанием предыдущей заявки.

**6.2 Многоканальная система массового обслуживания с отказами**

Пусть СМО содержит n каналов, интенсивность входящего потока заявок равна http://xreferat.ru/image/114/1307193558_61.png, а интенсивность обслуживания заявки каждым каналом равна http://xreferat.ru/image/114/1307193559_62.png. Размеченный граф состояний системы изображён на рисунке 4.

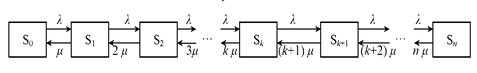


Рисунок 4 – Граф состояний многоканальной СМО с отказами

Состояние S0 означает, что все каналы свободны, состояние Sk (k = 1, n) означает, что обслуживанием заявок заняты k каналов. Переход из одного состояния в другое соседнее правое происходит скачкообразно под воздействием входящего потока заявок интенсивностью http://xreferat.ru/image/114/1307193558_61.png независимо от числа работающих каналов (верхние стрелки). Для перехода системы из одного состояния в соседнее левое неважно, какой именно канал освободится. Величина http://xreferat.ru/image/114/1307193565_89.png характеризует интенсивность обслуживания заявок при работе в СМО k каналов (нижние стрелки).

Сравнивая графы на рис. 3 и на рис. 5 легко увидеть, что многоканальная СМО с отказами является частным случаем системы рождения и гибели, если в последней принять http://xreferat.ru/image/114/1307193565_90.png и

http://xreferat.ru/image/114/1307193565_91.png                                                               (16)

При этом для нахождения финальных вероятностей можно воспользоваться формулами (4) и (5). С учётом (16) получим из них:

http://xreferat.ru/image/114/1307193565_92.png                                                                 (17)

http://xreferat.ru/image/114/1307193565_93.png                                                                       (18)

Формулы (17) и (18) называются формулами Эрланга – основателя теории массового обслуживания.

Вероятность отказа в обслуживании заявки ротк равна вероятности того, что все каналы заняты, т.е. система находится в состоянии Sn. Таким образом,

http://xreferat.ru/image/114/1307193566_94.png                                                                             (19)

Относительную пропускную способность СМО найдём из (8) и (19):

http://xreferat.ru/image/114/1307193566_95.png                                                             (20)

Абсолютную пропускную способность найдём из (9) и (20):

http://xreferat.ru/image/114/1307193566_96.png

Среднее число занятых обслуживанием каналов можно найти по формуле (10), однако сделаем это проще. Так как каждый занятый канал в единицу времени обслуживает в среднем http://xreferat.ru/image/114/1307193559_62.png заявок, то http://xreferat.ru/image/114/1307193560_70.png можно найти по формуле:

http://xreferat.ru/image/114/1307193566_97.png

**6.3 Одноканальная система массового обслуживания с ограниченной длиной очереди**

В СМО с ограниченной очередью число мест m в очереди ограничено. Следовательно, заявка, поступившая в момент времени, когда все места в очереди заняты, отклоняется и покидает СМО. Граф такой СМО представлен на рисунке 5.

|  |
| --- |
|  |

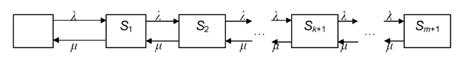


Рисунок 5 – Граф состояний одноканальной СМО с ограниченной очередью

Состояния СМО представляются следующим образом:

S0 – канал обслуживания свободен,

S1 – канал обслуживания занят, но очереди нет,

S2 – канал обслуживания занят, в очереди одна заявка,

Sk+1 – канал обслуживания занят, в очереди k заявок,

Sm+1 – канал обслуживания занят, все m мест в очереди заняты.

Для получения необходимых формул можно воспользоваться тем обстоятельством, что СМО на рисунок 5 является частным случаем системы рождения и гибели, представленной на рисунке 2, если в последней принять http://xreferat.ru/image/114/1307193567_99.png и

http://xreferat.ru/image/114/1307193567_100.png                                                                           (21)

http://xreferat.ru/image/114/1307193567_101.png                                                   (22)

http://xreferat.ru/image/114/1307193567_102.png                                                                      (23)

Выражения для финальных вероятностей состояний рассматриваемой СМО можно найти из (4) и (5) с учётом (21). В результате получим:

При р = 1 формулы (22), (23) принимают вид

При m = 0 (очереди нет) формулы (22), (23) переходят в формулы (14) и (15) для одноканальной СМО с отказами.

Поступившая в СМО заявка получает отказ в обслуживании, если СМО находится в состоянии Sm+1, т.е. вероятность отказа в обслуживании заявки равна:

http://xreferat.ru/image/114/1307193568_103.png

http://xreferat.ru/image/114/1307193568_104.png

Относительная пропускная способность СМО равна:

http://xreferat.ru/image/114/1307193568_105.png

Абсолютная пропускная способность равна:

http://xreferat.ru/image/114/1307193568_106.png

Среднее число заявок, стоящих в очереди Lоч, находится по формуле

http://xreferat.ru/image/114/1307193568_107.png

и может быть записано в виде:

http://xreferat.ru/image/114/1307193569_108.png                                                        (24)

При http://xreferat.ru/image/114/1307193569_109.png формула (24) принимает вид:

http://xreferat.ru/image/114/1307193569_110.png

http://xreferat.ru/image/114/1307193569_111.png – среднее число заявок, находящихся в СМО, находится по формуле(10)

http://xreferat.ru/image/114/1307193570_112.png

и может быть записано в виде:

http://xreferat.ru/image/114/1307193570_113.png                                              (25)

При http://xreferat.ru/image/114/1307193569_109.png, из (25) получим:

http://xreferat.ru/image/114/1307193570_114.png

Среднее время пребывания заявки в СМО и в очереди находится по формулам (12) и (13) соответственно.

# 6.4 Одноканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью

Примером такой СМО может служить директор предприятия, вынужденный рано или поздно решать вопросы, относящиеся к его компетенции, или, например, очередь в булочной с одним кассиром. Граф такой СМО изображён на рисунке 6.

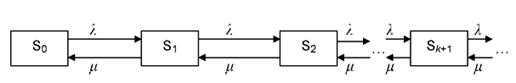


Рисунок 6 – Граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью

Все характеристики такой СМО можно получить из формул предыдущего раздела, полагая в них http://xreferat.ru/image/114/1307193570_116.png. При этом необходимо различать два существенно разных случая: а) http://xreferat.ru/image/114/1307193571_117.png; б) http://xreferat.ru/image/114/1307193571_118.png. В первом случае, как это видно из формул (22), (23), р0 = 0 и pk = 0 (при всех конечных значениях k). Это означает, что при http://xreferat.ru/image/114/1307193552_31.png очередь неограниченно возрастает, т.е. этот случай практического интереса не представляет.

Рассмотрим случай, когда http://xreferat.ru/image/114/1307193571_118.png. Формулы (22) и (23) при этом запишутся в виде:

http://xreferat.ru/image/114/1307193571_119.png

http://xreferat.ru/image/114/1307193571_120.png

Поскольку в СМО отсутствует ограничение на длину очереди, то любая заявка может быть обслужена, т.е. относительная пропускная способность равна:

http://xreferat.ru/image/114/1307193571_121.png

Абсолютная пропускная способность равна:

http://xreferat.ru/image/114/1307193572_122.png

Среднее число заявок в очереди получим из формулы (24) при http://xreferat.ru/image/114/1307193570_116.png:

http://xreferat.ru/image/114/1307193572_123.png

Среднее число обслуживаемых заявок есть:

http://xreferat.ru/image/114/1307193572_124.png

Среднее число заявок, находящихся в СМО:

http://xreferat.ru/image/114/1307193572_125.png

Среднее время пребывания заявки в СМО и в очереди определяются формулами (12) и (13).

**6.5 Многоканальная система массового обслуживания с ограниченной очередью**

Пусть на вход СМО, имеющей http://xreferat.ru/image/114/1307193558_60.png каналов обслуживания, поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью http://xreferat.ru/image/114/1307193558_61.png. Интенсивность обслуживания заявки каждым каналом равна http://xreferat.ru/image/114/1307193559_62.png, а максимальное число мест в очереди равно http://xreferat.ru/image/114/1307193559_64.png.

Граф такой системы представлен на рисунке 7.

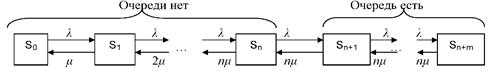


Рисунок 7 – Граф состояний многоканальной СМО с ограниченной очередью

http://xreferat.ru/image/114/1307193573_127.png – все каналы свободны, очереди нет;

http://xreferat.ru/image/114/1307193573_128.png – заняты *l* каналов (*l* = 1, n), очереди нет;

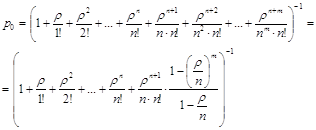
http://xreferat.ru/image/114/1307193573_129.png- заняты все n каналов, в очереди находится *i* заявок (*i* = 1, m).

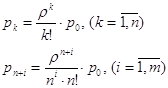
Сравнение графов на рисунке 2 и рисунке 7 показывает, что последняя система является частным случаем системы рождения и гибели, если в ней сделать следующие замены (левые обозначения относятся к системе рождения и гибели):

http://xreferat.ru/image/114/1307193573_130.png

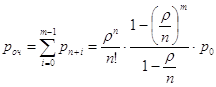
http://xreferat.ru/image/114/1307193574_131.png

Выражения для финальных вероятностей легко найти из формул (4) и (5). В результате получим:

                                         (26)



Образование очереди происходит, когда в момент поступления в СМО очередной заявки все каналы заняты, т.е. в системе находятся либо n, либо (n+1),…, либо (n + m – 1) заявок. Т.к. эти события несовместны, то вероятность образования очереди pоч равна сумме соответствующих вероятностей http://xreferat.ru/image/114/1307193574_134.png:

                                                             (27)

Отказ в обслуживании заявки происходит, когда все m мест в очереди заняты, т.е.:

http://xreferat.ru/image/114/1307193575_136.png

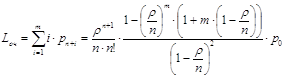
Относительная пропускная способность равна:

http://xreferat.ru/image/114/1307193575_137.png

Абсолютная пропускная способность:

http://xreferat.ru/image/114/1307193575_138.png

Среднее число заявок, находящихся в очереди, определяется по формуле (11) и может быть записано в виде:

                                      (28)

Среднее число заявок, обслуживаемых в СМО, может быть записано в виде:

http://xreferat.ru/image/114/1307193576_140.png

Среднее число заявок, находящихся в СМО:

http://xreferat.ru/image/114/1307193576_141.png

Среднее время пребывания заявки в СМО и в очереди определяется формулами (12) и (13).

**6.6 Многоканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью**

Граф такой СМО изображен на рисунке 8 и получается из графа на рисунке 7 при http://xreferat.ru/image/114/1307193570_116.png.

http://xreferat.ru/image/114/1307193576_142.jpg

Рисунок 8 – Граф состояний многоканальной СМО с неограниченной очередью

Формулы для финальных вероятностей можно получить из формул для n-канальной СМО с ограниченной очередью при http://xreferat.ru/image/114/1307193570_116.png. При этом следует иметь в виду, что при http://xreferat.ru/image/114/1307193576_143.png вероятность р0 = р1=…= pn = 0, т.е. очередь неограниченно возрастает. Следовательно, этот случай практического интереса не представляет и ниже рассматривается лишь случай http://xreferat.ru/image/114/1307193576_144.png. При http://xreferat.ru/image/114/1307193570_116.png из (26) получим:

http://xreferat.ru/image/114/1307193577_145.png

Формулы для остальных вероятностей имеют тот же вид, что и для СМО с ограниченной очередью:

http://xreferat.ru/image/114/1307193577_146.png

Из (27) получим выражение для вероятности образования очереди заявок:

http://xreferat.ru/image/114/1307193577_147.png

Поскольку очередь не ограничена, то вероятность отказа в обслуживании заявки:

http://xreferat.ru/image/114/1307193577_148.png

Относительная пропускная способность:

http://xreferat.ru/image/114/1307193578_149.png

Абсолютная пропускная способность:

http://xreferat.ru/image/114/1307193578_150.png

Из формулы (28) при http://xreferat.ru/image/114/1307193570_116.png получим выражение для среднего числа заявок в очереди:

http://xreferat.ru/image/114/1307193578_151.png

Среднее число обслуживаемых заявок определяется формулой:

http://xreferat.ru/image/114/1307193578_152.png

Среднее время пребывания в СМО и в очереди определяется формулами (12) и (13).

**6.7 Многоканальная система массового обслуживания с ограниченной очередью и ограниченным временем ожидания в очереди**

Отличие такой СМО от СМО, рассмотренной в подразделе 5.5, состоит в том, что время ожидания обслуживания, когда заявка находится в очереди, считается случайной величиной, распределённой по показательному закону с параметром http://xreferat.ru/image/114/1307193578_153.png, где http://xreferat.ru/image/114/1307193579_154.png – среднее время ожидания заявки в очереди, а http://xreferat.ru/image/114/1307193579_155.png – имеет смысл интенсивности потока ухода заявок из очереди. Граф такой СМО изображён на рисунке 9.

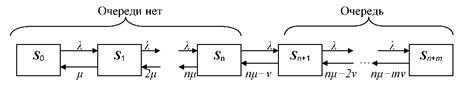


Рисунок 9 – Граф многоканальной СМО с ограниченной очередью и ограниченным временем ожидания в очереди

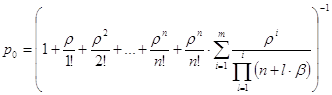
Остальные обозначения имеют здесь тот же смысл, что и в подразделе.

Сравнение графов на рис. 3 и 9 показывает, что последняя система является частным случаем системы рождения и гибели, если в ней сделать следующие замены (левые обозначения относятся к системе рождения и гибели):

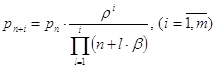
http://xreferat.ru/image/114/1307193579_157.png

http://xreferat.ru/image/114/1307193579_158.png             (29)

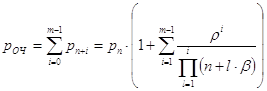
Выражения для финальных вероятностей легко найти из формул (4) и (5) с учетом (29). В результате получим:



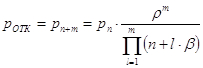
http://xreferat.ru/image/114/1307193580_160.png

,

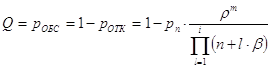
где http://xreferat.ru/image/114/1307193580_162.png. Вероятность образования очереди определяется формулой:



Отказ в обслуживании заявки происходит, когда все m мест в очереди заняты, т.е. вероятность отказа в обслуживании:



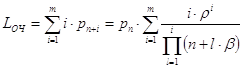
Относительная пропускная способность:



Абсолютная пропускная способность:

http://xreferat.ru/image/114/1307193581_166.png

Среднее число заявок, находящихся в очереди, находится по формуле (11) и равно:



Среднее число заявок, обслуживаемых в СМО, находится по формуле (10) и равно:

http://xreferat.ru/image/114/1307193582_168.png

Среднее время пребывания заявки в СМО складывается из среднего времени ожидания в очереди и среднего времени обслуживания заявки:

http://xreferat.ru/image/114/1307193582_169.png

# 

# Заключение

В настоящее время появилось большое количество литературы, посвященной непосредственно теории массового обслуживания, развитию ее математических аспектов, а также различных сфер ее приложения - военной, медицинской, транспортной, торговле, авиации и др.

Теория массового обслуживания опирается на теорию вероятностей и математическую статистику. Первоначальное развитие теории массового обслуживания связано с именем датского ученого А.К. Эрланга(1878-1929),с его трудами в области проектирования и эксплуатации телефонных станций.

Теория массового обслуживания — область прикладной математики, занимающаяся анализом процессов в системах производства, обслуживания, управления, в которых однородные события повторяются многократно, например, на предприятиях бытового обслуживания; в системах приема, переработки и передачи информации; автоматических линиях производства и др. Большой вклад в развитие этой теории внесли российские математики А.Я. Хинчин, Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогоров, Е.С. Вентцель и др.

Предметом теории массового обслуживания является установление зависимостей между характером потока заявок, числом каналов обслуживания, производительностью отдельного канала и эффективным обслуживанием с целью нахождения наилучших путей управления этими процессами. Задачи теории массового обслуживания носят оптимизационный характер и в конечном итоге включают экономический аспект по определению такого, варианта системы, при котором будет обеспечен минимум суммарных затрат от ожидания обслуживания, потерь времени и ресурсов на обслуживание и от простоев каналов обслуживания.

В коммерческой деятельности применение теории массового обслуживания пока не нашло желаемого распространения.

В основном это связано с трудностью постановки задач, необходимостью глубокого понимания содержания коммерческой деятельности, а также надежного и точного инструментария, позволяющего просчитывать в коммерческой деятельности различные варианты последствий управленческих решений.

Список литературы

1 Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. - М.: «Высшая школа», 2003. - 479 с.

2 Лаврусь, О.Е. Теория массового обслуживания. Методические указания/ О.Е. Лаврусь, Ф.С. Миронов. - Самара: СамГАПС, 2002.- 38 с.

3 Саакян, Г.Р. Теория массового обслуживания: лекции / Г.Р. Саакян. - Шахты: ЮРГУЭС, 2006. - 27 с.

4 Авсиевич, А.В. Теория массового обслуживания. Потоки требований, системы массового обслуживания / А.В. Авсиевич, Е.Н. Авсиевич. - Самара: СамГАПС, 2004. - 24 с.

5 Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. Пер.с англ./ Пер. И.И. Грушко; под ред. В.И. Нейман. - М.: Машиностроение, 1979. - 432 с.